0.2.3. Coloquio 22/02/05.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II COLOQUIO 22/02/05 TEMA 1

1. Sea $F(x,y,z) = (4y-z, 3x-y, 2z)$ y sea C una curva regular contenida en el plano Π de ecuación $3x+2y-4z=1$. Sabiendo que C encierra una región R en Π de área 4, calcular la circulación de F a lo largo de C con orientación elegida de manera que su proyección en el plano xy se recorra en sentido antihorario.

2. Dada una función C^2 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, calcular el flujo del campo $F(x,y,z) = (y, f(z), 2z)$ a través de la superficie descripta por $y^2+z^2 = 25, 0 \le x \le 1, z \ge 0$, orientada de manera que su normal tenga coordenada z negativa.

3. Hallar el área de la superficie definida por $x^2+z^2 = y^2, x^2+z^2 \le 2z, x \ge 0, y \ge 0$.

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Sean $f(x,y,z) = y^2 - 2x^2$ y C una curva en $\mathbb{R}^3$. Si para cada punto P de C, C es perpendicular en P a la superficie de nivel de f que pasa por P, mostrar que C está contenida en un plano.

(**b**) Hallar el valor de a entre 0 y 1 que hace máxima la circulación de $F(x,y) = (2y, 4x)$ a lo largo de la curva de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1-a)^2} = 1$ (orientada en sentido antihorario).

5. Hallar todas las soluciones $y(x)$ $(x > 0)$ de la ecuación diferencial $x^2y'' - 2xy' + 2y = 1$ tales que $y(1) = 1$ e $y(2) = -1$.

0.2.4. Coloquio 01/03/05.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II COLOQUIO 01/03/05 TEMA 1

---

1. Sea $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ un campo vectorial C^2 tal que el flujo de su rotor a través de la superficie descripta por $3x + z = 3, 2x^2 + y^2 \leq 9$, orientada de manera que la coordenada z de su normal es positiva, es 3. Calcular la circulación del campo

$$G(x, y, z) = (P(x, y, z) + z^2, Q(x, y, z), R(x, y, z) + x^3/3)$$

a lo largo de la curva de ecuaciones $3x + z = 3, 2x^2 + y^2 = 9$, orientada de manera que su proyección en el plano xy sea recorrida en sentido horario.

---

2. Hallar el volumen del cuerpo descripto en coordenadas cilíndricas por $-\sqrt{1-\rho^2} \leq z \leq 1-\rho$. Graficar.

---

3. Dado $h > 0$, sea R la región en el espacio descripta por $x^2 + z^2 \leq 25, h \leq y \leq 4$. Determinar h, sabiendo que el flujo del campo $F(x, y, z) = (2x + y^2, 0, z - y^2)$ a través del borde y hacia el exterior de R es 150π.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Sean $f(x, y, z) = x + x^2 + y^3 + z^2$ y C la curva en $\mathbb{R}^3$ de ecuaciones $ax + 5y = 5, x^2 + (y-1)^2 = bz$. Hallar todos los $a, b \neq 0$ de manera que C sea perpendicular a la superficie de nivel de $f(x, y, z)$ que pasa por $(0, 1, 0)$.

(**b**) Sea $z = f(x, y)$ definida implícitamente por la ecuación $F(x, y, z) = 0$ en el entorno de $(1, 2, 1)$, siendo F una función C^2, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, tal que $F(1, 2, 1) = 0, F_z(1, 2, 1) \neq 0$. Mostrar que si $f(x, y)$ tiene extremo en $(1, 2)$, el plano tangente a la superficie de ecuación $F(x, y, z) = 0$ en $(1, 2, 1)$ es horizontal.

---

5. Hallar a, b de manera que la ecuación diferencial $(2xy - ay)\,dx + (x^2 - bx)\,dy = 0$ sea exacta y la curva solución que pasa por $(1, 1)$ sea en este punto paralela a la recta de ecuación $2x + 3y = 5$.

0.2.5. Coloquio 08/03/05.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II COLOQUIO 08/03/05 TEMA 1

---

1. Sean $F(x,y,z) = (\frac{y^2}{2}, xy, \frac{x^2+y^2}{2})$, y R un trozo de la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=1$ cuyo borde es una curva regular C. Mostrar que la circulación de F a lo largo de C es 0.

---

2. Sea S la superficie descripta por $4x^2+y^2-z=3, z \leq 6$. Dado un campo escalar C^2 $f(x,y)$ y $a \in \mathbb{R}$, sea $F(x,y,z) = (f'_y(x,y), -f'_x(x,y), 3az)$. Hallar a, sabiendo que el flujo de F a través de S orientada con su normal alejándose del eje z es 3π.

---

3. Hallar el promedio del campo escalar $f(x,y,z) = xy+z$ a lo largo de la curva parametrizada por $t \mapsto (\cos(t), \text{sen}(t), 2t), 0 \leq t \leq \pi$.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) La proyección en el plano yz de una región R contenida en el plano de ecuación $2x-y+z=0$ tiene área 2. Hallar el área de R.

(**b**) Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^2 tal que $f(2,3)=5$ y la máxima derivada direccional de f en $(2,3)$ vale 4. Dada $g(x,y) = f(x+1, y+2)$, calcular la derivada direccional $g'((1,1),v)$, siendo v un vector unitario con la misma dirección y el mismo sentido que $\nabla(f)(2,3)$.

---

5. La velocidad de una partícula en el plano depende de su posición según la ley $V(x,y) = (x, 2y+1)$. Sabiendo que la partícula pasa por el punto $(1,2)$, mostrar que también pasa por $(2, 19/2)$.

0.2. Coloquios.

0.2.1. Coloquio 05/07/05.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II COLOQUIO 05/07/05
TEMA 1

---

1. Sean $F(x, y, z) = (-y^2, x, zh(x, y))$, donde $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función C^2, y R la región de $\mathbb{R}^3$ descripta por $x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1$. Sabiendo que el flujo de F a través del borde de R hacia su exterior es 2π, calcular $\iint_D h(x, y)\, dxdy$, siendo D la región de $\mathbb{R}^2$ descripta por $x^2 + y^2 \leq 1$.

---

2. Calcular el área la porción de superficie descripta por $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq 3z - 2$.

---

3. Sea $F(x, y, z) = (y, x - z, z)$. Hallar a de manera que sea máxima la circulación de F a lo largo de la curva de ecuaciones $x^2 + y^2 = 1, z = 7a^2 x$, orientada de manera que su tangente en $(0, 1, 0)$ tenga coordenada x negativa.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 1 - 3x + y^2 + 3b(y - 1)^3$. Hallar b de manera que el polinomio de Taylor de grado 2 de f en $(1, 1)$ sea

$$p(x, y) = 1 - 3x + y^2$$

y $f(1, 2) = 31$.

(**b**) Hallar $a > 0$ tal que $\iint_{D_a} (x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}\, dxdy = 1$, siendo D_a el disco de ecuación $x^2 + y^2 \leq a^2$.

---

5. La velocidad de una partícula en el plano depende de su posición según la ley $V(x, y) = (-y, x)$. ¿Qué distancia recorre la partícula para ir desde $(0, 2)$ hasta $(-2, 0)$?

---

6. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función C^3 tal que $\nabla^2 f = 3$. Calcular el flujo del gradiente de f a través del borde del sólido descripto por $x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1, x \geq 1$, hacia el exterior.

0.2.2. Coloquio 26/07/05.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II COLOQUIO 26/07/05
TEMA 1

(los ejercicios 1,2,3,4 y 6 corresponden al primer cuatrimestre de 2005, los ejercicios 1,2,3,4 y 5 a los cuatrimestres anteriores)

---

1. Sea C la curva parametrizada por $t \mapsto (0, \cos(t), 3\,\mathrm{sen}(t)), 0 < t < \pi$. Dada una función C^2 $f(u,v)$, calcular la circulación del campo $F(x,y,z) = (yx + f'_u(x,z), x, z + f'_v(x,z))$ a lo largo de C orientada con t creciente.

---

2. Calcular el área de la porción de superficie descripta por $z = \sqrt{x^2+y^2}, 2z \leq x+1$.

---

3. Sea R la región descripta por

$$x^2 + z^2 \leq 4, \quad 0 \leq y \leq 3 - \sqrt{x^2+z^2}$$

Dado el campo vectorial $F(x,y,z) = (x, 2, z+3y)$, calcular el flujo de F a través del borde de R, con el normal orientado hacia adentro de R.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Hallar una función $f(x,y)$ tal que $f(1,2) = 3$, el plano tangente al gráfico de f en $(1,2,3)$ tenga ecuación $z = 3$, $f''_{xx}(1,2) = f''_{yy}(1,2) = 1$, y f no tiene extremo local en $(1,2)$.

(**b**) Sea $F(x,y,z) = (3yz, 2xz, xy)$. Calcular el flujo de F hacia el exterior de la región descripta por

$$x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1$$

---

5. Hallar la solución $y_1(x)$ de la ecuación $y''(x) - 4y'(x) + 29y(x) = 0$ que satisface

$$y_1(0) = y_2(0), y_1(\pi/2) = y_2(\pi/2)$$

siendo $y_2(x)$ la solución de $y'(x) + y(x) = x + 2$ que satisface $y_2(0) = 0$.

---

6. Sea $f(x,y) = (x-2)^2 + y^2$, y sea C la curva descripta por $(x-2)y = 1$.

(**a**) Dibujar aproximadamente C.

(**b**) Hallar y clasificar los extremos de f restringida a C. Interpretar geométricamente.

0.2.3. Coloquio 02/08/05.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II COLOQUIO 02/08/05
TEMA 1

(los ejercicios 1,2,3,4 y 6 corresponden al primer cuatrimestre de 2005, los ejercicios 1,2,3,4 y 5 a los cuatrimestres anteriores)

---

1. Sea $F(x,y,z) = (P(x,y,z), 4 + x^2y, -3 + x)$ un campo vectorial C^2 en $\mathbb{R}^3$. Calcular el flujo del rotor de F a través de la superficie descripta por $z = y, 1 - y^2 \geq x \geq 0$, con el vector normal de manera que tenga componente z negativa, sabiendo que la circulación de F a lo largo de la curva parametrizada por $(1 - t^2, t, t)$ con t desde -1 a 1 es 2.

---

2. Sea $F(x,y,z) = (zf'_y(x,y,z) + 2x, -zf'_x(x,y,z) + y, z + 1)$, siendo f un campo escalar C^2 en $\mathbb{R}^3$. Calcular el flujo de F a través de la superficie descripta por $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z$, orientada de manera que su normal tenga componente z negativa.

---

3. Hallar el volumen de la región de $\mathbb{R}^3$ descripta por

$$2 + x^2 + y^2 \leq z \leq 11, x^2 + y^2 \geq 1$$

Graficar.

---

4. Responder a los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Una porción S del plano de ecuación $2x + 3y + 2z = 0$ tiene área 2. ¿Cuánto vale el flujo del campo $F(x,y,z) = (-1, 0, 2)$ a través de S orientada de manera que su normal tenga componente z negativa?

(**b**) Sea $f(u,v)$ una función C^3 tal que $\nabla(f)(0,0) = (2,3)$ y la matriz Hessiana es

$$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

¿Tiene $g(x,y) = f(2x,y) - 4x - 3y$ extremo en $(0,0)$?

---

5. Hallar una funcion $f(x)$ sabiendo que su gráfico pasa por $(1,2)$ y que en todo punto (x,y) del gráfico la pendiente de éste es 3 veces la de la recta que une (x,y) con el origen.

---

6. Hallar los extremos de $f(x,y,z) = (x-2)^2 + y^2 + z^2$ restringida a la superficie de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Interpretar geométricamente.

0.2.4. Coloquio 09/08/05.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II COLOQUIO 09/08/05
TEMA 1

(los ejercicios 1,2,3,4 y 6 corresponden al primer cuatrimestre de 2005, los ejercicios 1,2,3,4 y 5 a los cuatrimestres anteriores)

---

1. Sea S la porción de superficie descripta por $x^2 + y^2 + z^2 = 9, -2 \leq y \leq 1$, y sea

$$F(x, y, z) = (x^3y^4, -2x^3y^4, 0)$$

Mostrar que el flujo de $\nabla \times F$ a través de S orientada con el normal alejándose del eje y es 0.

---

2. Hallar $a > 0$ tal que el flujo del campo $F(x, y, z) = (x^3, y^3, z)$ a través de la superficie descripta por $z = a(1 - \sqrt{x^2 + y^2}), z \geq 0$, orientada de manera que el normal tenga componente z positiva, sea π.

---

3. Calcular $\int_C z\, ds$ siendo C la curva parametrizada por

$$t \mapsto (\cos t, \operatorname{sen} t, 2t), t \in (0, \pi/2)$$

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Un campo vectorial C^3 F satisface que el flujo de $\nabla \times F$ a través de la superficie descripta por $z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0$, orientada con el normal con z positivo, es 3. Calcular el flujo de $\nabla \times F$ a través de la superficie descripta por $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1, z \leq 0$, orientada con el normal con z positiva.

(**b**) El área de la región plana D es 3. Hallar el área de la superficie definida por

$$z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, (x, y) \in D$$

5.

(**a**) Hallar a sabiendo que $y(x) = xe^x$ es solución de

$$y''(x) - (2a + 1)y'(x) + 2ay(x) = 0$$

(**b**) Con el a determinado en el punto anterior hallar la solución de

$$y''(x) - (2a + 1)y'(x) + 2ay(x) = 1$$

que satisface $y(0) = 0, y'(0) = 3$.

---

6. El plano tangente al gráfico de una función C^2 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en $(0, 1, 2)$ tiene ecuación $x - 2y + 3z = 4$. Hallar un vector tangente a la curva parametrizada por $t \mapsto (f(2t, 1 - t), f(t, 1 + 2t^2), t)$ en el punto correspondiente a $t = 0$.

0.2.5. Coloquio 16/08/05.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II COLOQUIO 16/08/05
TEMA 1

---

1. Sean $F(x,y,z) = (-2zy, 4y, 2xy + 2z^2)$ y C una curva regular contenida en la superficie K descripta por $x^2 + z^2 = 4, z > 1$. Sabiendo que C encierra una región S en K de área 4, calcular la circulación de F a lo largo de C con orientación elegida de manera que su proyección en el plano xy se recorra en sentido antihorario.

---

2. Dado $F(x,y,z) = (x^2 + y + 2 + z^2, e^{x^2} + y^2, 3 + 2x - 2z(x+y))$ calcular el flujo de F a través de la superficie descripta por $x^2 + y^2 + z^2 = 6z + 25, z \geq 0$, orientada con el normal alejándose del eje z.

---

3. Hallar el volumen de la región de $\mathbb{R}^3$ descripta por $z^2 < x^2 + y^2 < 4 - z^2, x \leq y \leq \sqrt{3}x$

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Hallar la longitud del arco de curva descripto en coordenadas polares por $\rho = 2\operatorname{sen}\varphi$.

(**b**) Sea D una región plana de área 2. Hallar el área de $S = \{(2x, 2y, 1) : (x,y) \in D\}$.

---

5. La aceleración de un cuerpo que se mueve en forma rectilínea es proporcional a su velocidad. Si a tiempo $t = 0s$ la velocidad es $v = 10m/s$ y a tiempo $t = 1s$ es $v = 5m/s$, ¿qué espacio habrá recorrido el móvil a tiempo $t = 8s$?

---

6. Hallar los puntos del cilindro de ecuación $x^2 + z^2 = 4$ más cercanos al punto $(1, 2, 3)$.

0.2. Coloquios.

0.2.1. Coloquio 13/12/05.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II COLOQUIO 13/12/05
TEMA 1

(Los alumnos del primer cuatrimestre del 2005 deberán resolver los ejercicios $1, 2, 3, 4, 6$, los restantes los ejercicios $1, 2, 3, 4, 5$.)

---

1. Sea $F(x, y, z) = (xf'(z), yf'(z), zf(z))$, donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función C^2 tal que $f(1) = 2, f(0) = -1$. Calcular el flujo de F a través de la superficie descripta por $x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 1$, con el normal alejándose del eje z.

---

2. Siendo $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^2, calcular el flujo del rotor del campo $F(x, y, z) = (xz, y, Q(x, z))$ a través de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$ con el normal de coordenada z positiva.

---

3. Sea $F(x, y, z) = (x, 1, az)$. Hallar a de manera que el flujo de F a través de $x^2 + z^2 = 4, 0 \leq y \leq 2$, orientada de manera que su normal se aleje del eje y sea 2.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Sea $F(x, y, z) = (2x^2, 0, 0)$. Hallar una esfera que contenga al origen de manera que el flujo de F hacia el exterior de la esfera no sea 0.

(**b**) Hallar $a > 0$ para que la mínima distancia al origen de la curva de ecuación $a^2x^2 + y^2 = 1$ sea $1/2$.

---

5. Hallar el número real a y la función $y(t)$ sabiendo que $y'(t) = a(t-1)y(t)$ y que la recta tangente al gráfico de y en $(0, y(0))$ tiene ecuación $y = 3t + 1$.

---

6. Hallar el volumen de la región del espacio descripta por $2\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 4, x^2+y^2+(z-5)^2 \geq 5$.

0.2.2. Coloquio 20/12/05.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II COLOQUIO 20/12/05
TEMA 1

(Los alumnos del primer cuatrimestre del 2005 deberán resolver los ejercicios $1, 2, 3, 4, 6$, los restantes los ejercicios $1, 2, 3, 4, 5$.)

---

1. Sea C la curva parametrizada por

$$t \mapsto (t\cos t, t\,\mathrm{sen}\, t, 2t), \quad \pi \leq t \leq 2\pi$$

(**a**) Dibujar aproximadamente C.

(**b**) Calcular la longitud de C.

---

2. Hallar $r > 0$ sabiendo que el flujo del campo $F(x,y,z) = (x^2 + x, xy, z)$ hacia el exterior del cuerpo definido por $y^2 + z^2 \leq r^2, -1 \leq x \leq 1$ es 5π.

---

3. Dada $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ C^2, hallar la circulación del campo $F(x,y,z) = (2x+2P(x,y,z), 2y, P(x,y,z)+2z)$ a lo largo de la curva de ecuaciones $z = 4 - x^2 - y^2, x^2 - 2x + y^2 = 0$ orientada de manera que su tangente en $(2,0,0)$ tenga coordenada y negativa.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^2 tal que $f(1,2) = 3$ y el vector $(1,1,-1)$ es tangente al gráfico de f en $(1,2,3)$. Hallar la derivada direccional $f'((1,2),(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2))$.

(**b**) El flujo del campo C^2 $F(x,y,z) = (P(x,y), Q(x,y), 0)$ a través de la superficie

$$x^2 + 9y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$$

con el normal hacia arriba es 5. ¿Cuánto vale el flujo del campo F a través de la superficie

$$x^2 + 9y^2 + z^2 = 1, z \leq 0$$

con el normal hacia arriba?.

---

5. Hallar la ecuación de la curva en $\mathbb{R}^2$ que pasa por $(0,3)$ tal que su pendiente en cualquiera de sus puntos es tres veces la ordenada del punto.

---

6. Hallar el área de la superficie descripta por $(z-2)^2 = x^2 + y^2, z \leq 2, x^2 + y^2 \leq 2x$.